

## **PIANO m@t.abel – PON**

### **Presentazione delle attività didattiche**

#### **Premessa**

Il Piano m@t.abel è rivolto ai docenti di matematica di scuola secondaria di primo grado e del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado.

Le attività in esso presentate forniscono ai docenti dei suggerimenti a supporto della loro didattica. Esse hanno come obiettivo il miglioramento dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana e costituiscono, a tutti gli effetti, uno strumento di aggiornamento e formazione professionale.

I curricoli di matematica cui fanno riferimento sono quelli presentati, per la Scuola Secondaria di primo grado, nella proposta UMI *La Matematica per il cittadino, Matematica 2001* e successivamente nelle Indicazioni nazionali ministeriali del 2007 (D.M. n. 68) e, per il primo biennio della scuola secondaria di secondo grado, nell'analogo documento UMI *Matematica 2003*.

Le attività non esauriscono tutti gli argomenti dei curricoli, ma hanno l'ambizione di fornire indicazioni metodologiche articolate su come affrontare alcuni nodi concettuali di particolare importanza per la formazione matematica degli studenti.

Con l'espressione "nodi concettuali" si intende fare riferimento a concetti tematici centrali in un percorso didattico, a ostacoli epistemologici o a difficoltà cognitive non banali che gli studenti solitamente incontrano. Spesso, queste difficoltà sono dovute, oltre che a questioni epistemologiche, anche a questioni didattiche come l'uso di stereotipi nei libri di testo, i conflitti tra linguaggio naturale e linguaggio matematico, la confusione tra percezione e teoria relativamente all'osservazione delle figure, e così via.

Le attività costruite sono significative e adeguate a trattare i nodi concettuali individuati. La loro organizzazione segue il filo di un possibile percorso didattico, in continuità, dal primo al secondo ciclo.

Il presente documento, al momento parziale, offre una presentazione delle attività e dei relativi nodi concettuali individuati per ciascun nucleo tematico, con una breve giustificazione delle scelte effettuate.

#### **I percorsi**

Per ogni nucleo tematico è stato costruito un percorso che indica un ordine temporale parziale di svolgimento delle varie attività proposte. L'obiettivo è quello di dare all'insegnante una proposta di possibile sequenza logico-temporale delle varie attività all'interno di un determinato nucleo. Si tratta, ovviamente, solo di possibili scelte fra alcuni dei tanti percorsi che possono essere realizzati a partire dalle indicazioni curriculari. Devono essere visti essenzialmente come una proposta e non come indicazioni prescrittive. Ciascun insegnante potrà confrontare le indicazioni fornite con la propria programmazione curricolare o con quella condivisa del proprio istituto.

Sono stati costruiti altri due percorsi di sequenze di attività, per ciascuno dei due livelli scolari (scuola secondaria di primo e di secondo grado), in modo da toccare tutti i vari nuclei tematici. Il primo è costituito da attività che prestano particolare attenzione ai problemi di comprensione e comunicazione di un testo e, quindi, ai delicati problemi di transizione dal linguaggio naturale al linguaggio specifico della matematica. Il secondo, invece, è costituito da attività che riguardano la modellizzazione e risoluzione di problemi.

# NUMERI

Il tema *Numeri* è indubbiamente uno dei punti fondamentali dell'insegnamento della matematica in tutta la Scuola secondaria: sono insiti in esso concetti e capacità di calcolo alla base di gran parte della matematica. Per questo, il tema va affrontato con attenzione, in modo che quei concetti e quelle capacità di calcolo siano acquisiti in modo corretto, motivato, e rimangano quindi stabilmente nelle conoscenze e nelle competenze degli alunni.

Le attività si pongono proprio in quest'ottica, cercando situazioni ricche di spunti che aiutino a inquadrare i concetti in questione, ad approfondirli e a capirne l'importanza.

Il nucleo *Numeri* comprende argomenti che sono in genere affrontati all'inizio della Secondaria di primo grado (numeri primi, operazioni con frazioni, ecc.), poi i vari sistemi numerici (in particolare razionali e reali), ordini di grandezza e stime e infine l'introduzione graduale di un linguaggio simbolico con il calcolo di espressioni algebriche.

Nella didattica tradizionale veniva dato molto spazio ad esercizi di calcolo su espressioni numeriche e algebriche. Talvolta, però, si trattava di esercizi piuttosto ripetitivi, volti più ad un addestramento che a una reale comprensione.

Oggi viene sottolineato che la sicurezza nel calcolo si raggiunge anche con la consapevolezza dei procedimenti seguiti; in questo quadro è molto importante un uso appropriato di strumenti elettronici di calcolo. Ugualmente viene sottolineata la necessità di essere in grado di stimare l'ordine di grandezza e la plausibilità dei risultati ottenuti: questa capacità è spesso un punto debole comune a tutti gli ordini di scuola.

Infine, ricordiamo che se da un lato è cruciale raggiungere sicurezza nel calcolo con i numeri razionali, dall'altro va compresa la necessità, sia pratica sia teorica, delle successive estensioni a partire dall'insieme dei numeri naturali.

## Scuola secondaria di primo grado

### Nodi concettuali e attività

Il tema del *Numero* è spesso affrontato nelle attività di accoglienza degli alunni che provengono dalla scuola primaria: si offre quindi l'occasione per fare un'opportuna ricognizione delle conoscenze raggiunte nel segmento scolare precedente.

Le attività proposte rappresentano un modo più stimolante di avvicinare argomenti irrinunciabili nel programma di aritmetica e di algebra, rispetto ad approcci tradizionali. Si tratta di applicare, già dalla prima classe, opportune prassi che poi saranno importanti per lo sviluppo cognitivo e delle competenze, anche in preparazione delle prove esterne dell'INVALSI o delle successive prove OCSE PISA.

I nodi concettuali si riferiscono ad argomenti di base affrontati in tutte le scuole. Pensando alle difficoltà più comuni degli alunni, si sono cercate proposte alternative: è opportuno che ogni alunno possa trovare offerte diversificate che vadano incontro al suo stile di apprendimento.

### NODI CONCETTUALI

- Linguaggio naturale e linguaggio matematico
- Ordine di grandezza
- Dai problemi alle espressioni e viceversa
- Approccio ai razionali, numeri sulla retta
- Stima e plausibilità di un calcolo
- Numeri primi multipli e divisori

## ATTIVITA'

- Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni
- Un'eclissi di sole
- Parli il “matematiche”? Dal problema all'espressione, all'equazione
- Frazioni in movimento
- Proprietà dei numeri razionali
- Chicchi di riso
- Numeri primi, conosciuti e sconosciuti

### Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni

In questa attività, adatta per iniziare il lavoro sul tema *Numero*, si presentano, si applicano e si discutono algoritmi per eseguire le operazioni (in particolare, la moltiplicazione), diversi da quelli usuali. Si tratta di procedimenti di calcolo propri di tempi e culture diverse; in questo contesto si potranno anche valorizzare semplici strategie scoperte dagli alunni.

Si avrà occasione di sviluppare le abilità di calcolo mentale o scritto e di scoprire e applicare in modo significativo alcune proprietà; si potrà arrivare a comprendere meglio i procedimenti usuali, che talvolta vengono appresi in modo meccanico.

### Un'eclissi di sole

Ci sono varie situazioni in cui ci capita di avere a che fare con numeri molto grandi o molto piccoli: ad esempio, leggiamo sul giornale che la produzione di rifiuti in Italia è di  $10^8$  tonnellate all'anno, che il *PIL* (prodotto interno lordo) in Italia è stato per l'anno 2000 di €  $9,21 \cdot 10^{14}$ , che il diametro di un globulo rosso del sangue è di  $7 \cdot 10^{-3}$  mm. Sono tutte situazioni in cui usciamo dall'esperienza sensibile diretta; per coglierne a pieno il significato, occorre ricostruire apposite immagini mentali che si basano, per confronto proporzionale, su qualcosa di tangibile.

L'attività è proponibile nel terzo anno, anche in corrispondenza di lavori realizzati per scienze: è molto interessante, sul piano didattico, collegare la matematica con l'astronomia, per evitare che quest'ultima si riduca all'osservazione di immagini più o meno comprensibili per i nostri alunni. Si lavora sull'ordine di grandezza, sull'approssimazione, sull'uso consapevole degli strumenti di calcolo. Il proposito generale consiste nella soluzione di “problemi veri” e nella costruzione di modelli di un fenomeno, l'eclisse appunto, che solitamente suscita interesse e curiosità.

### Parli il “matematiche”? Dal problema all'espressione, all'equazione

Curando il passaggio dal *linguaggio naturale* al *linguaggio matematico* si fa cogliere la necessità di un linguaggio progressivamente formalizzato, curando al contempo l'uso del linguaggio naturale. Come è giustamente sottolineato nel D.M. n 68 del 2007, quando si risolvono problemi è bene chiedere di “*spiegare anche in forma scritta il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati*”.

Questa attività è pensata per la classe terza, ma alcune parti possono essere anticipate in classi precedenti se appunto si vuole porre attenzione al passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico. L'uso di un linguaggio progressivamente formalizzato è uno dei traguardi da raggiungere: qui si propone una strada graduale, che parte dal linguaggio naturale e valorizza l'espressione verbale degli alunni. Dal problema espresso a parole si arriva alla sua traduzione in termini di espressioni numeriche e letterali e alla successiva risoluzione (*modellizzazione matematica*). Si mette anche in evidenza come un'espressione algebrica permetta di generalizzare un problema.

### **Frazioni in movimento**

Nella prima infanzia si instaura un modello primitivo di numero, che si identifica con il numero naturale. Successivamente la concezione di numero richiede una serie di adattamenti. In tale processo di adattamento rientra la capacità di riconoscere scritture diverse che indicano uno stesso numero: si tratta di una situazione nuova rispetto a quanto si presentava nel modello primitivo dei numeri naturali. Il passaggio dall'insieme dei numeri naturali a quello dei razionali non è un semplice ampliamento, ma richiede una vera "riconcettualizzazione". Per gli alunni è difficile comprendere che scritture diverse (come  $0,25$ ;  $25/100$ ;  $1/4$ ; ...) corrispondano ad un solo concetto matematico.

In questa attività, che si può svolgere in prima classe, si propone la costruzione di uno strumento concreto che consente di mettere in evidenza aspetti, significati e scritture diverse di un numero razionale. Con l'uso della retta numerica e di altri strumenti di rappresentazione si favorisce l'apprendimento di un concetto complesso.

### **Proprietà dei numeri razionali**

Il concetto di numero razionale costituisce uno dei nodi cruciali nell'apprendimento della matematica nella Scuola secondaria di primo grado. È importante che le attività per lo sviluppo di tale concetto siano ricche e che si avvalgano di strumenti di tipo diverso.

In questo caso, partendo da una costruzione geometrica conosciuta come il *metodo del falegname*, si insiste sulla sistemazione dei razionali sulla retta, per aiutare gli studenti a formarsi l'idea della densità dei razionali. È facile e spontaneo il collegamento con la geometria, anche perché nella costruzione si applica il teorema di Talete.

Nella seconda parte dell'attività si vuole iniziare con gli alunni un percorso "razionale", presentando alcune tracce di dimostrazione di proprietà elementari dei numeri razionali. Si avviano gli alunni all'uso di una semplice simbolizzazione algebrica e alla concatenazione di considerazioni logiche.

### **Chicchi di riso**

L'attività, che prende lo spunto da una nota novella indiana sulla nascita del gioco degli scacchi, può essere proposta in prima o in seconda classe, a seconda che la si voglia usare come problema introduttivo per lo studio delle potenze, oppure come lavoro di consolidamento.

Con questa attività ci si propone di leggere e scrivere numeri naturali e decimali in base 10 usando la notazione esponenziale, di individuare regolarità, di fornire esempi concreti che diano l'idea della crescita esponenziale, di produrre congetture relative all'interpretazione e alla spiegazione di osservazioni effettuate in diversi contesti.

Si vuole evitare che le potenze di numeri naturali, per esempio di 2 o di 10, e in generale i numeri molto grandi, compaiano nella pratica didattica solo in una serie di tecniche puramente operative, spesso prive di un reale significato per i nostri alunni.

### **Numeri primi conosciuti e sconosciuti**

Con questa attività ci si propone di creare una "familiarità" con i numeri che non si possono *sgretolare* nel prodotto di numeri interi più piccoli e che si chiamano numeri *primi*. L'attività può essere introdotta quando gli alunni conoscono il significato di numero primo, l'uso elementare delle tavole, l'uso corrente di una calcolatrice tascabile, i criteri di divisibilità per 2, per 3, per 5.

Si offrono molti spunti per affrontare problemi che sviluppino la capacità di conoscere e riconoscere proprietà e caratteristiche dei numeri primi.

L'obiettivo generale è quello di dare significatività al tema dei numeri primi, che spesso è presentato soltanto con definizioni e calcoli (scomposizioni): si accenna ad applicazioni in campo sociale e scientifico, e si cerca di far apprezzare la bellezza dell'argomento attraverso la scoperta di regolarità e proprietà. Gli alunni avranno anche l'opportunità di affrontare situazioni che ancora vengono studiate dai matematici e di conoscerne altre che tutt'oggi costituiscono problemi non risolti.

## **Scuola secondaria di secondo grado – Primo biennio**

### **Nodi concettuali e attività**

I numeri offrono la base per la costruzione del significato dei simboli algebrici e delle operazioni fra di essi: per manipolare con sicurezza formule algebriche è necessario comprendere profondamente le operazioni fra numeri e le loro proprietà; allo stesso tempo è indispensabile il ritorno dalla formula al numero per dare significato ai simboli.

Le attività proposte sono volte a toccare alcuni nodi concettuali fondamentali, che costituiscono parte essenziale del percorso e che possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento.

#### **NODI CONCETTUALI**

- Rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali
- Ordine di grandezza, precisione e approssimazione
- Concettualizzazione dei numeri reali
- Ordinamento e densità
- Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
- Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo

#### **ATTIVITA'**

- Dalla frazione al numero decimale: esploriamo
- Il livello del mare
- Il foglio A4
- Numeri sulla retta
- Quel che vedo è sempre vero
- Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra
- L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica

### **Dalla frazione al numero decimale: esploriamo**

All'inizio del percorso di matematica è opportuno verificare e consolidare il possesso, da parte degli allievi, delle necessarie abilità di calcolo con i numeri (naturali, razionali, relativi). L'attività presentata si colloca in questo percorso, che precede l'avvio al calcolo algebrico, ed ha come obiettivo il *saper riconoscere e usare correttamente diverse rappresentazioni dei numeri razionali*.

L'attività è un lavoro guidato, che porta a rispondere alle seguenti domande:

- Come si trasforma una frazione in numero decimale?
- Data una frazione ridotta ai minimi termini, sotto quali condizioni la frazione ha una rappresentazione decimale limitata?
- C'è una relazione tra il denominatore di una frazione ridotta ai minimi termini e il numero delle cifre dopo la virgola nella sua rappresentazione decimale, nel caso questa sia limitata?
- Quando una frazione, ridotta ai minimi termini, ha al denominatore un fattore diverso da 2 e da 5, che cosa si può dire della sua rappresentazione decimale?
- Data una frazione ridotta ai minimi termini, quante sono le cifre della sua rappresentazione decimale?

## Il livello del mare

L'attività affronta i problemi legati alle *stime degli "ordini di grandezza"*. In effetti, saper stimare correttamente un ordine di grandezza, o saper approssimare dei valori, rappresenta una difficoltà diffusa. Proponendo problemi anche legati a situazioni reali, si capisce che in certi casi è importante l'ordine di grandezza, mentre il numero di cifre significative diventa secondario.

All'inizio dell'attività si introduce la notazione scientifica per rappresentare i numeri e si discute l'uso di questa scrittura per valutare l'ordine di grandezza. Si tratta di strumenti fondamentali per un cittadino, perché spesso arrivano dai 'mass media' informazioni che vengono accolte con scarsa capacità di analisi e senza un adeguato 'senso dei numeri'.

Analizzando e ragionando su un importante tema d'attualità (di quanto si innalzerebbe il livello dei mari se tutti i ghiacciai si sciogliessero?), si affrontano in un caso concreto le diverse problematiche inerenti l'ordine di grandezza, la precisione, l'approssimazione.

## Il foglio A4

I nodi *"rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali"*, *"concettualizzazione dei numeri reali"*, *"ordinamento e densità"* si riferiscono alla necessità che *"a livello di ciclo secondario gli studenti, che negli anni precedenti hanno acquisito una buona comprensione dei numeri interi ed hanno una conoscenza generale dei numeri razionali e delle loro proprietà, inizino a lavorare con i numeri irrazionali, per arrivare poi alla conoscenza (a livello intuitivo) dei numeri reali e, contemporaneamente, alla comprensione del completamento della retta numerica"* (Matematica 2003, Introduzione al nucleo Numeri e algoritmi).

Questa attività propone una prima costruzione dei numeri reali, che sarà poi approfondita con l'attività "Numeri sulla retta".

Perché, quando si fotocopio un foglio A4, lo si può ingrandire esattamente su un foglio A3? E che c'entra questo con la matematica?

A partire da queste domande si sviluppa un percorso che mostra la necessità di uscire dal mondo dei numeri razionali, e costruirne di nuovi: i numeri irrazionali. Il percorso prosegue mostrando come sia possibile rappresentare mediante allineamenti decimali un qualsiasi numero reale, e come si possano eseguire calcoli tra questi.

L'attività integra aspetti di problem solving, di dimostrazione, di invenzione, di discussione matematica.

## Numeri sulla retta

Questa attività può essere vista come un completamento de "Il foglio A4". Si propone una sistemazione dei concetti relativi all'ordine *e alla densità degli insiemi numerici*, e alla *compatibilità delle operazioni*, in particolare della moltiplicazione, rispetto all'ordine.

Le proposte di laboratorio ruotano attorno alla rappresentazione dei numeri sulla retta, a partire dai razionali, per estendersi poi ad alcuni numeri irrazionali (le radici quadrate di naturali) ed infine ai reali.

Un percorso guidato mira a superare le difficoltà degli alunni nel corretto confronto fra frazioni e numeri decimali. Si esaminano situazioni che sono spesso causa di errori, come il confronto tra numeri decimali con un numero diverso di cifre decimali (ad es. 3,2 e 3,12), e la moltiplicazione tra numeri minori di 1 (in cui il prodotto è minore dei fattori).

## Quel che vedo è sempre vero

"La differenza tra il quadrato di un numero naturale e il quadrato del suo precedente è sempre un numero dispari?"

Questa domanda guida l'attività proposta. L'obiettivo è di far cogliere agli alunni l'importanza di quel "sempre": come è possibile raggiungere la certezza, se i casi di cui si parla sono infiniti?

Nello sviluppo dell'attività entrano in gioco due punti cruciali dell'apprendimento:

- la *formalizzazione* (saper esprimere con lettere relazioni enunciate a parole);



- la differenza tra *verifica* in un numero finito di casi e *dimostrazione* in generale.

L'attività quindi permette agli studenti di affinare le capacità critiche nell'ambito del ragionamento matematico, di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione letterale e, inoltre, di acquisire consapevolezza nell'uso degli strumenti di calcolo.

È idonea ad inizio del biennio.

### **Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra**

A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti per costruire nuovi concetti e abilità, e per arricchire di significati concetti già appresi. Qui si propongono due problemi, il primo semplice e il secondo più complesso, per un'attività centrata sulla *traduzione dal linguaggio naturale*, in cui sono formulati i problemi, *al linguaggio algebrico*, che ne permette la soluzione.

Il contesto scelto è *linguistico*: il fulcro dell'attenzione didattica si sposta così *dagli algoritmi* risolutivi di equazioni e sistemi *alla traduzione* e messa in formula dei problemi. È in questo passaggio, infatti, che si concentrano le maggiori difficoltà degli studenti, come rilevato anche dalle prove internazionali.

Insistendo troppo sulla sola risoluzione di equazioni e sistemi, slegati da un contesto problematico, si rischia di far percepire la matematica solo come strumento operativo. Occorre, invece, presentarla anche come *strumento di pensiero*, mettendone in luce gli aspetti concettuali: in altre parole, la matematica va presentata come palestra di ragionamento e non come collezione di ricette di calcolo.

### **L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica**

Giochi di "magia" matematica e sfide di capacità di calcolo mentale sono il cuore di questa attività in cui si affronta il nodo "*linguaggio naturale e linguaggio algebrico*". Ci riferiamo all'introduzione delle regole del calcolo algebrico e alle difficoltà che lo studente incontra quando deve tradurre algebricamente ("mettere in formula") un problema. In concreto, si tratta di dare significato al calcolo algebrico, evitando che i nostri alunni interpretino le formule algebriche come pure sequenze di segni. Si propongono così situazioni problematiche in cui il linguaggio dell'algebra supera quello dell'aritmetica e diventa strumento per esprimere relazioni e generalizzare: un linguaggio utile sia per comprendere sia per dimostrare.

Scopo principale dell'attività è allora giungere alle regole di calcolo comprendendone il significato, e di usare il calcolo algebrico per risolvere problemi. Si tratta anche di cercare di presentare la matematica come strumento di pensiero, mettendone in luce gli aspetti concettuali.

## **GEOMETRIA**

La geometria si pone da una parte come ambiente per costruire pensiero teorico, indirizzato all'argomentazione e alla dimostrazione, dall'altra come contesto per affrontare e porsi problemi significativi, per esplorare e percepire affascinanti relazioni in natura e nell'opera dell'uomo, per avviare alla modellizzazione.

Le attività presentate sono particolarmente adatte per permettere agli allievi non solo di eseguire, ma anche di progettare, costruire e manipolare con materiali diversi, discutere, argomentare, fare ipotesi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi fatte. La scelta fatta in queste attività è quella di far seguire le definizioni, i concetti, le dimostrazioni alla risoluzione delle situazioni problematiche. È quindi determinante l'equilibrio tra le fasi operative e le graduali sistemazioni teoriche, in modo da favorire nei ragazzi il passaggio da evidenze visive ad argomentazioni sempre più rigorose. Per tale ragione, l'approccio tradizionale alla geometria basato su calcoli di lunghezze, angoli, perimetri, aree, ecc. in contesti poco significativi e artificiosi (pensiamo al contadino che ha un campo a forma di trapezio isoscele), viene evitato a favore di situazioni ricche e motivanti, in cui l'alunno si possa formare basi intuitive, stimolando nella produzione di immagini mentali e nella

visualizzazione di figure, una comprensione delle proprietà geometriche fondata sulla capacità di astrazione e correlazione.

Si vuole costruire una geometria che sia efficace strumento di modellizzazione della realtà, che offra frequenti occasioni di richiesta di argomentazioni, che dia ampio spazio all'intuizione, senza peraltro lasciarsi guidare da essa a troppo facili conclusioni. L'abitudine a una visione dinamica (insieme a quella statica), degli oggetti geometrici, fornisce maggiori strumenti di esplorazione e di formulazione di congetture, specie se supportata da un uso integrato di strumenti tradizionali e tecnologici.

## **Scuola secondaria di primo grado**

### **Nodi concettuali e attività**

La scelta dei nodi concettuali è stata guidata dalle difficoltà che hanno gli studenti, a qualunque età, e soprattutto nella scuola secondaria di secondo grado, a riconoscere, comprendere ed applicare definizioni e proprietà della geometria in contesti vari. Per esempio, sono note le difficoltà a tracciare le altezze in un triangolo (soprattutto se il triangolo è scaleno), oppure a tracciare la distanza tra due rette parallele o tra un punto e una retta (soprattutto se le rette non sono in posizioni standard come orizzontale o verticale). Queste difficoltà sono spesso dovute al prevalere di stereotipi nelle spiegazioni e nei libri di testo, oppure alla mancata comprensione di definizioni, seppure ricordate e recitate a memoria. Pensiamo, per esempio, all'angolo, e alle difficoltà a concepirlo come infinito e determinato da due semirette con la stessa origine, non solamente da un archetto disegnato in prossimità del vertice. E pensiamo alla difficoltà nel riconoscere regolarità e simmetrie (per esempio per quanto riguarda il parallelogrammo i fraintendimenti sono spesso presenti). Al fine di costruire il più presto possibile, significati corretti e stabili, le attività scelte mettono in luce questi nodi concettuali fin dalla scuola secondaria di primo grado.

Le attività per la geometria nella scuola secondaria di primo grado sono volte a toccare alcuni nodi concettuali fondamentali, che costituiscono parte essenziale del percorso di geometria e che possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento.

### **NODI CONCETTUALI**

- Distanza punto/retta; altezze; perpendicolarità
- Angoli: confronto, operazioni e misura
- Costruzioni geometriche, congetture, argomentazioni
- Regolarità nel mondo reale e simmetrie
- Definizione, classificazione dei quadrilateri
- Modellizzazione; similitudine; rapporti tra grandezze
- Visione spaziale; rappresentazione mentale e grafica di oggetti tridimensionali

### **ATTIVITA'**

- L'albero maestro
- L'orologio
- Costruire poligoni
- Regolarità e simmetria
- Definire i quadrilateri con le simmetrie
- La foto
- Solidi noti e solidi misteriosi



### L'albero maestro

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *distanza tra un punto e una retta*, che è causa di molti misconcetti tra gli allievi, spesso legati a situazioni stereotipe di rette e segmenti orizzontali o verticali. Insieme alla questione della distanza punto-retta, si affrontano gli altri nodi concettuali ad essa legati, come la perpendicolarità e le altezze di un triangolo, in situazioni non stereotipe, come quando non ci sono lati orizzontali o verticali, o quando il triangolo è ottusangolo e l'altezza cade fuori dal lato opposto. Ci si aspetta quindi che gli allievi, alla fine di questa attività, siano capaci di tracciare correttamente le altezze in un triangolo (ma anche in un parallelogrammo e in un trapezio), conoscendo il significato di distanza punto-retta, di perpendicolare e di altezza.

### L'orologio

L'attività si riferisce al nodo concettuale degli *angoli* in relazione all'uso dell'orologio analogico e del passare del tempo segnato dalle lancette, con costruzione del significato di angolo e di arco, loro distinzione e applicazioni in situazioni di confronto, misura, operazioni. Partendo da una situazione problematica legata all'orologio e allargandola alla costruzione di un orologio di grandi dimensioni, si vuole che gli allievi ottengano angoli piccoli (come per es. di 1 grado), su circonferenze di raggi diversi, in modo da associare l'angolo allo spazio tra le due semirette e non semplicemente all'arco che si usa per indicarlo. Questa esperienza ha lo scopo di evitare il fraintendimento, diffuso tra gli allievi, che l'angolo si identifichi con l'arco oppure con una regione finita di piano.

### Costruire poligoni

L'attività si sviluppa attorno al nodo concettuale dei poligoni, tramite loro costruzioni geometriche e l'uso delle congetture e delle argomentazioni. Si snoda attraverso un itinerario adatto anche come primo approccio alla geometria del piano in una classe prima, in quanto conduce gli allievi a conoscere e definire le principali figure piane attraverso la scoperta delle loro proprietà e attraverso la loro descrizione tramite il linguaggio naturale, via via più specifico. I poligoni quindi vengono conosciuti come oggetti geometrici attraverso la scoperta delle loro proprietà, alcune delle quali servono a determinarli. Si tratta per esempio la disuguaglianza triangolare come proprietà nei triangoli, scoperta attraverso l'esplorazione e la raccolta di dati in tabelle, la somma degli angoli interni di un triangolo e di un poligono, con la possibilità di approfondire nella direzione dei criteri di uguaglianza dei triangoli o di situazioni di isoperimetria ed equiestensione.

### Regolarità e simmetria

L'attività si riferisce al nodo concettuale delle *trasformazioni elementari nel piano*, esplorato attraverso la ricerca di regolarità nel quotidiano e la costruzione di significati relativi a traslazioni e simmetrie. Le esplorazioni relative alle simmetrie hanno lo scopo di evitare misconcetti diffusi tra gli allievi, come quelli relativi al tracciamento di rette che, pur avendo posizioni regolari in una figura (es. le diagonali in un parallelogrammo), in realtà non costituiscono assi di simmetria per la stessa. Le simmetrie possono anche essere utilizzate per disegnare figure geometriche, una volta costruiti adeguatamente i loro significati.

### Definire quadrilateri con le simmetrie

Lo scopo di questa attività è quello di condurre i ragazzi alla costruzione dei quadrilateri convessi e alla scoperta di una loro classificazione, utilizzando come criterio gli elementi di simmetria che possiedono. L'intento definitorio quindi non viene realizzato tramite assunzioni statiche da acquisire a memoria, ma in modo costruttivo, tramite attività di scoperta con l'uso delle simmetrie. Tale metodologia conduce alla classificazione dei quadrilateri per inclusione e all'intuizione della classificazione euclidea per partizione. L'uso del linguaggio in modo attivo da parte dei ragazzi

supporta la costruzione della classificazione, guidata da opportune schede che favoriscono l'esplorazione e la congettura. L'utilizzo di un modello che offre l'ambiente in cui effettuare le esplorazioni è particolarmente efficace per la formulazione delle congetture su quadrilateri con uno o più assi di simmetria e sulle relazioni tra essi in termini inclusivi.

### **La foto**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della proporzionalità diretta applicato in contesto di figure simili, anche se non si tratta il tema della similitudine in modo tradizionale. Infatti, a partire da una situazione problematica che chiede la statura di un bambino rappresentato in foto, si sviluppa il nodo della proporzionalità con la modellizzazione, i rapporti tra grandezze e la similitudine. Per essere risolta, infatti, tale situazione problematica necessita del riconoscimento della proporzionalità tra le grandezze reali (altezza di un bambino e altezza di un guard-rail) e le corrispondenti grandezze rappresentate in una fotografia (sullo stesso piano verticale). Particolarmente utile nell'attività è la discussione guidata dall'insegnante, che ha lo scopo di socializzare le varie proposte di soluzione degli studenti, per scegliere quella adeguata allo scopo. Tra le proposte non mancheranno modelli di crescita di bambini proporzionali col tempo o modelli additivi, che andranno scartati dopo opportuni controesempi.

### **Solidi noti e solidi misteriosi**

Questa attività stimola nei ragazzi la visione spaziale e si basa sullo sviluppo del nodo concettuale dei solidi (già noti o sconosciuti), tramite loro rappresentazioni fisiche, grafiche, mentali. Punta, quindi, allo sviluppo della visione tridimensionale che anche nei livelli scolari successivi vede spesso il sorgere di difficoltà negli studenti. L'attività si sviluppa in modo laboratoriale, favorendo un apprendimento percettivo-motorio prima che simbolico. Si basa sulla costruzione, identificazione e scoperta di alcuni solidi, connessa con la descrizione delle loro proprietà geometriche, in un percorso che, partendo da evidenze visive o da ragionamenti su oggetti non fisicamente presenti, arriva ad argomentazioni e concettualizzazioni sempre più rigorose. Fanno parte del percorso la costruzione di un tetraedro, la soluzione di una situazione problematica in cui sono coinvolte piramidi, lo studio di come sono fatti questi solidi. Come in altre attività, è fondamentale il ruolo dell'insegnante nella gestione della discussione matematica.

## **Scuola secondaria di secondo grado – Primo biennio**

### **Nodi concettuali e attività**

Le attività di geometria per il biennio della scuola secondaria di secondo grado si pongono in continuità con le analoghe proposte per la scuola secondaria di primo grado, con l'obiettivo di condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro rappresentazione razionale, in contesto di geometria sintetica e di geometria analitica, verso le attività di modellizzazione, legate al nucleo delle Relazioni. Anch'esse puntano a toccare nodi concettuali di fondamentale importanza per la costruzione di significati matematici, come la modalità di variazione delle grandezze geometriche (lineare o più complessa di quella lineare, come quadratica o esponenziale) e il modo di rappresentare tale variazione in grafici e tabelle attraverso lo studio di variazioni finite, incrementi e pendenza. In tal modo si punta ad integrare il più possibile i diversi modi di rappresentazione degli oggetti matematici (numerico, grafico, simbolico) e di far raggiungere agli allievi competenze per il cittadino utili a interpretare il mondo circostante e non solo gli enti matematici.

## **NODI CONCETTUALI**

- Passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico
- Strumenti ed assiomatica: verifica empirica e validazione teorica
- Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi
- Costruzioni geometriche, congetture, argomentazione, dimostrazione
- Visione spaziale, proprietà di oggetti tridimensionali e loro rappresentazione su un piano
- Modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano; pendenza, rapporti tra grandezze
- Variazione di grandezze geometriche e relazioni tra di esse

## **ATTIVITA'**

- Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie
- Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione
- Problemi di minimo nel piano
- Il teorema di Pitagora tra leggenda e mito
- Simmetrie nei poliedri
- Studenti in movimento
- Ognuno cresce a modo suo

### **Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie**

L'attività si colloca in continuità con lo studio delle simmetrie nella scuola secondaria di primo grado, approfondendo il tema anche in relazione alle costruzioni architettoniche che in Italia ci offrono esempi culturali significativi. Essa si riferisce al nodo concettuale del *passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico*, in quanto non pretende di sistematizzare tutte le conoscenze relative alle simmetrie, ma di introdurre un discorso intorno ad esse, a partire dalle conoscenze pregresse degli allievi e in un contesto problematico contestualizzato nella realtà circostante. Gli allievi si devono cimentare quindi nel riconoscimento di figure geometriche, di loro invarianti e simmetrie, provando a descrivere tali figure con terminologia che via via si fa più specifica.

### **Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione**

L'attività si colloca all'interno di un percorso che ha come obiettivo primario l'introduzione alla dimostrazione, guidando gli studenti al nodo concettuale dell'assiomatica, che si basa su premesse accettate, definizioni e proprietà da dimostrare. Dando per noti i concetti di perpendicolare e bisettrice, lo studente affronta una situazione problematica sulla relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo isoscele, con l'uso di un software di geometria dinamica. Per avviare una riflessione collettiva sulla differenza tra le forme spontanee di argomentazione e le modalità specifiche di una argomentazione matematica, è cruciale il ruolo dell'insegnante nella discussione matematica.

### **Problemi di minimo nel piano**

L'attività si riferisce al nodo concettuale delle isometrie (simmetrie assiali), per comprendere situazioni e risolvere problemi, sviluppato in contesto geometrico che tocca proprietà del triangolo come la disuguaglianza triangolare. Si propone di modellizzare il fenomeno della formazione delle immagini in uno specchio piano, attraverso l'uso di strumenti e strategie diverse. Si invitano gli studenti a esplorare le situazioni geometriche, procedendo dall'intuizione alla scoperta di proprietà. Nella fase iniziale si conducono gli studenti a riflettere sul significato di valore minimo; nella fase esplorativa e di modellizzazione sono usati non solo strumenti classici, come riga e goniometro, ma

anche vario materiale povero e software di geometria, allo scopo di aiutare gli studenti a giustificare le congetture formulate.

### **Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia**

L'attività si inserisce nel contesto della geometria euclidea piana, prevede che siano già possedute le nozioni di equiscomponibilità ed equivalenza fra poligoni e propone alcune dimostrazioni del teorema di Pitagora. Si prende spunto dalla lettura di un racconto per risvegliare l'interesse nei confronti del teorema, che può essere già noto agli allievi, riportando successivamente esempi di dimostrazioni. Il nodo concettuale dell'attività ruota attorno al teorema di Pitagora, con riferimento all'equivalenza e all'equiscomponibilità di figure piane, sviluppate attraverso congetture, argomentazioni, verifiche e dimostrazioni. Il percorso è realizzato anche mediante l'ausilio di software di geometria dinamica ed è arricchito con animazioni in cui sono visualizzate le dimostrazioni proposte. Si fa riferimento anche al modo di costruire gli angoli retti da parte degli egiziani, motivando così la parte applicativa e quella teorica del nodo concettuale.

### **Simmetrie nei poliedri**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della visione spaziale con riferimento alle proprietà di oggetti tridimensionali e della loro rappresentazione sul piano. Si indaga, con un approccio intuitivo, su come estendere le proprietà di simmetria dei poligoni ai poliedri, fino ad arrivare ai concetti di piano di simmetria, di centro di simmetria, di asse di simmetria e di asse di rotazione. Il percorso didattico è caratterizzato dalla manipolazione di modelli fisici di poliedri, visualizzati anche con software didattico in 3 dimensioni. Procede dallo sviluppo piano degli stessi e dall'esplorazione mediante l'uso di specchi e tende a far acquisire agli studenti una descrizione corretta e condivisa di poliedri regolari e delle loro simmetrie.

### **Studenti in movimento**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano*, sviluppato tramite attività di moto, in cui si rilevano i dati di posizione e tempo in situazioni diverse. Tale campo di esperienza è particolarmente ricco se esplorato mediante la tecnologia di sensori di moto collegati con computer o calcolatrici e offre la possibilità agli studenti di costruire significati relativi non solo alla legge oraria e alla traiettoria (con le relative corrispondenze e diversità), ma anche significati di pendenza e sua variazione, fondamentali per introdurre allo studio di funzioni che sarà affrontato negli anni successivi. In tal modo, si affronta la relazione tra grandezze - evitando il misconcetto del grafico orario come rappresentazione fisica della traiettoria - attraverso l'analisi di grafici sul concetto di pendenza, che è la radice cognitiva fondamentale per affrontare successivamente il concetto di derivata.

### **Ognuno cresce a modo suo**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *variazione di grandezze geometriche*, con la conseguente individuazione di relazioni tra esse, espresse tramite funzioni. La situazione problematica proposta ha lo scopo di indagare sulla variazione di tre tipi di funzioni, che sono rispettivamente lineare, quadratica ed esponenziale. La risoluzione del problema impegna gli studenti nell'esprimere tale variazione non solo in termini ricorsivi, ossia ponendo un valore in funzione del precedente, ma anche in termini di formula, espressa tramite una funzione che lega le due variabili in gioco. Lo scopo è quello di far riflettere sui diversi modi di variazione tra

grandezze, che non si riduce (come spesso ingenuamente credono gli studenti) a quello lineare, ma può essere più complicato. Il confronto tra le diverse funzioni rende conto dei diversi andamenti e costringe a una riflessione sulla rappresentazione numerica, simbolica e grafica che anticipa gli studi successivi indirizzati all'analisi matematica.

## RELAZIONI E FUNZIONI

L'acquisizione di un pensiero funzionale, costruito attraverso un percorso verticale che porta gradualmente all'astrazione e alla simbolizzazione, rappresenta uno dei principali obiettivi didattici della scuola secondaria in riferimento al tema *Relazioni e funzioni*.

L'attitudine a riconoscere e utilizzare vari registri interpretativi di una stessa situazione, ad analizzare qualitativamente l'andamento di un fenomeno, deve diventare progressivamente un'abitudine mentale degli alunni come è vero anche che l'uso di tecniche operative non deve rappresentare soltanto l'applicazione meccanica di una formula, ma il risultato di una riflessione sui significati dei simboli nei diversi contesti utilizzati.

Le attività presentate guidano gradualmente gli studenti a sviluppare questo atteggiamento attraverso problemi che, nella maggior parte dei casi rimandano a situazioni concrete.

Il tema *Relazioni e funzioni* viene introdotto mediante attività volte alla scoperta di proprietà caratteristiche di alcuni insiemi numerici o alla definizione di semplici relazioni funzionali fra due grandezze. Il passaggio dalla descrizione a parole delle regolarità osservate, alla generalizzazione attraverso l'uso dei simboli matematici, è costruito in modo da fornire agli studenti sufficienti esperienze per superare la discontinuità tra il punto di vista aritmetico e quello algebrico.

Il primo approccio alle funzioni, alla loro rappresentazione grafica, all'uso di tabelle di proporzionalità per modellizzare situazioni concrete, ha come obiettivo la costruzione di esperienze significative, ancora pre-formalizzate, che siano di base, nel successivo segmento dell'obbligo d'istruzione, alla rappresentazione simbolica, alla connessione tra grafico, andamento, espressione algebrica, zeri e segno e all'intreccio tra i vari registri interpretativi. Si vogliono evitare, in ogni caso, inutili addestramenti alla pura manipolazione sintattica di formule che non producono effetti sulla comprensione dei concetti.

### Scuola secondaria di primo grado

#### Nodi concettuali e attività

I nodi concettuali sono stati scelti per mettere in risalto, da una parte le nozioni irrinunciabili su cui gli studenti devono maturare sufficiente esperienza, dall'altro le criticità che gli studenti stessi generalmente incontrano e che non sempre vengono superate anche per mancanza di opportune strategie didattiche. Il riferimento alle relazioni e all'uso delle lettere mette in evidenza la particolare attenzione che deve essere prestata all'uso del linguaggio naturale prima, e a quello specifico della matematica poi, in particolare per parlare degli oggetti matematici, delle loro proprietà e delle relazioni che è possibile stabilire fra insiemi.

La proporzionalità diretta, da trattare in modo approfondito e sistematico con il linguaggio delle proporzioni, è un primo approccio all'utilizzo del linguaggio delle funzioni, che sarà poi sviluppato nella scuola secondaria di secondo grado ed è centrato sull'analisi dei dati, sull'interpretazione di situazioni concrete, sulla costruzione di ipotesi. Infine le equazioni di primo grado sono introdotte come strumenti per formalizzare problemi e, per esplorare le eventuali strategie risolutive senza enfatizzare troppo l'aspetto simbolico e le tecniche meccaniche di soluzione.

## NODI CONCETTUALI

- Proprietà e relazioni in vari contesti
- Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
- Proporzionalità diretta. Proporzionalità inversa
- Problemi ed equazioni di primo grado.

## ATTIVITA'

- I numeri amici
- Diversi tra confini uguali
- Il numero di ferro
- Mettiamo in equilibrio
- Il figlio del re
- Diete alimentari I
- Le camicie di Diofanto

### I numeri amici

L'attività si riferisce al nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti*, esplorato in maniera attiva e dinamica, attraverso l'osservazione di regolarità e relazioni che emergono da un'indagine sulla provenienza degli alunni della classe. Si parte dalla costruzione e analisi di semplici corrispondenze rappresentate con tabelle, insiemi e frecce e si arriva alla scoperta di alcune relazioni significative nei numeri naturali ("essere multiplo di", "essere divisore di", "essere maggiore di" ...) che gli alunni dovrebbero avere già incontrato negli studi precedenti, magari senza raggiungere quella consapevolezza che la maggiore età e il nuovo corso di studi potrebbero rendere possibile. L'attività permette agli alunni di acquisire esperienza su un uso più pertinente e ragionato del linguaggio naturale per parlare degli oggetti matematici, delle loro proprietà e delle relazioni che è possibile stabilire fra insiemi di oggetti.

### Diversi tra confini uguali

L'attività fa riferimento ai nodi concettuali *proprietà e relazioni in vari contesti* e *all'uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà*.

Partendo da una situazione concreta si pone e si affronta il problema: "figure che hanno lo stesso perimetro devono essere necessariamente anche equiestese?".

Il percorso porta gli alunni a scoprire relazioni tra figure piane, a consolidare i concetti di perimetro e area di un poligono e ad acquisire piena consapevolezza della diversità esistente tra le due nozioni. Infine li porta a modellizzare la famiglia dei rettangoli isoperimetrici con la relazione algebrica  $x+y=k$  e con il grafico della funzione  $y=k-x$ .

Dal punto di vista metodologico, l'attività è caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni, dalle fasi di manipolazione e laboratorio, dallo sviluppo della discussione in classe, dall'uso di rappresentazioni grafiche e simboliche.

### Il numero di ferro

E' un'esperienza di scoperta realizzata nell'ambito del laboratorio di scienze e affronta, in modo approfondito e sistematico, questioni relative al nodo concettuale dell'*uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà della proporzionalità diretta*. L'attività riguarda

lo studio delle proprietà della materia e del volume dei corpi e, oltre a costituire una prima introduzione alla geometria solida, conduce alla costruzione graduale di una tabella e del relativo grafico che sintetizza la relazione che lega il peso al volume di un corpo. L'esperimento guida gli studenti a modellizzare con il linguaggio delle proporzioni una situazione concreta di relazione di proporzionalità diretta che porta alla determinazione del peso specifico e li avvia ad utilizzare il linguaggio delle funzioni, che sarà poi sviluppato nella scuola secondaria di secondo grado, mediante una funzione del tipo  $y = kx$ .

### **Mettiamo in equilibrio.**

E' un'esperienza di scoperta realizzata nell'ambito del laboratorio di scienze e affronta in modo approfondito e sistematico questioni relative ai nodi concettuali *dell'uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà della proporzionalità inversa*. Una competenza fondamentale che si dovrebbe acquisire attraverso lo studio della matematica è quella di costruire modelli che permettano di interpretare la realtà, cogliendo regolarità, differenze e analogie.

L'esperienza laboratoriale che proponiamo è un esempio di come guidare i ragazzi alla modellizzazione di una situazione concreta con una relazione di proporzionalità inversa e mediante una funzione del tipo  $y=a/x$ . L'attività prevede l'uso di una "bilancia" costituita da un'asta sospesa nel suo punto centrale e libera di oscillare in un piano verticale a cui vengono agganciati dei pesi per ricercare, analizzare e formalizzare le varie posizioni di equilibrio.

### **Il figlio del re**

L'attività fa riferimento ai nodi concettuali *proprietà e relazioni in vari contesti*. La proposta è costituita da una situazione-problema, che si colloca in un contesto narrativo (liberamente tratto da "I sette messaggeri" di Dino Buzzati), dove il rapporto spazio/tempo gioca un ruolo primario. Il racconto narra di principi e cavalieri, di castelli e reami, di viaggi e comunicazioni, richiamando nella mente degli alunni un mondo leggendario. Il contesto narrativo favorisce il loro coinvolgimento nella risoluzione della situazione-problema, attivando ragionamenti in cui si tengono sotto controllo due storie parallele ed interagenti. La soluzione della situazione problematica si ottiene dall'analisi di un grafico che rappresenta matematicamente la storia proposta.

### **Diete alimentari I**

L'attività fa riferimento ai nodi concettuali *proprietà e relazioni in vari contesti*. Prendendo spunto dall'educazione alimentare, si arriva all'elaborazione di una dieta che prevede l'apporto equilibrato dei diversi principi nutritivi. I dati, via via raccolti ed elaborati, vengono tabulati usando rappresentazioni diverse che hanno proprietà diverse e possono essere utili per scopi differenziati. Pertanto, per capire le situazioni, occorre analizzare vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni e saper passare opportunamente da una all'altra. L'attività qui presentata è un esempio di come consolidare la conoscenza intuitiva del concetto di funzione e di come iniziare la sua formalizzazione, avendo cura di mantenere un forte controllo del significato dei simboli e delle rappresentazioni, in uno specifico contesto di tipo scientifico legato a temi della vita quotidiana. In particolare, vengono considerate funzioni definite su insiemi finiti e le loro rappresentazioni mediante tabelle e grafici a colonne e vengono esercitate le abilità di calcolo e di uso del foglio elettronico.



### Le camicie di Diofanto

L'attività si riferisce al nodo concettuale *problemi ed equazioni di primo grado* e conduce gli alunni a formalizzare, in equazioni del tipo  $ax + by = c$ , con  $a$ ,  $b$  e  $c$  numeri interi, il problema di determinare quante camicie di un prezzo e quante dell'altro possono essere acquistate avendo a disposizione una determinata somma di denaro.

Si affrontano questioni delicate: la ricerca di soluzioni nell'insieme dei numeri naturali, dei numeri interi e dei numeri razionali; la determinazione del numero di soluzioni del problema; la costruzione di strategie risolutive basate su esplorazioni, l'uso strumentale di tabelle e grafici.

Le strategie risolutive comportano ragionamenti del tipo "facciamo finta che", "supponiamo che", e rendono particolarmente produttiva la discussione e la produzione di ipotesi da parte degli studenti che devono cimentarsi nell'uso di un linguaggio sempre più adeguato e preciso.

## **Scuola secondaria di secondo grado – Primo biennio**

### **Nodi concettuali e attività**

Le attività, costruite in continuità con quelle della Scuola secondaria di I grado e legate al tema Geometria, sono di riferimento per i nodi concettuali fondamentali del tema *Relazioni e funzioni* e concorrono ad indirizzare gli studenti nell'uso consapevole della nozione di funzione e nella connessione tra le varie rappresentazioni funzionali. Non dimentichiamo infatti che il concetto di funzione è particolarmente importante nella costruzione e analisi di modelli per la soluzione di problemi ed è particolarmente significativo in un percorso didattico che ambisca a dare della matematica sia una dimensione culturale, sia una dimensione strumentale di disciplina atta a descrivere, interpretare e prevedere fenomeni e situazioni in diversi contesti disciplinari.

Il concetto di funzione lineare e funzione quadratica, sviluppato in modo sistematico e approfondito, da una parte permette di comprendere, utilizzando i vari registri interpretativi, il significato di andamento di una funzione, dall'altra permette di riferire le equazioni e disequazioni di primo e secondo grado agli zeri e ai segni di funzioni lineari.

### **NODI CONCETTUALI**

- Concetto di funzione
- Funzioni lineari
- Funzioni quadratiche
- Funzioni costanti a tratti, lineari a tratti
- Modelli e problemi

### **ATTIVITA'**

- Introduzione al concetto di funzione
- Allineamenti. Esploriamo le funzioni lineari
- Risparmiare sulle bollette telefoniche
- Aree e pavimentazioni. Esploriamo le funzioni quadratiche
- Rettangoli e fontane
- Diete alimentari II
- Concentrazione di un medicinale

### **Introduzione al concetto di funzione**

Il *concetto di funzione* è uno dei nodi più significativi che gli studenti incontrano nel loro percorso scolastico. Per evitare di correre il rischio di limitarsi a ripetere definizioni formalmente corrette ma vuote di significato, l'attività propone esperienze per una prima trattazione sistematica, esplicita e consapevole della nozione di funzione. Con l'obiettivo di costruire significati per il concetto di funzione, sono presentate situazioni legate al movimento, in particolare all'idea di una grandezza che varia nel tempo o ad alcune curve tracciate da punti in movimento. Le diverse rappresentazioni delle funzioni (numeriche, grafiche e simboliche) sono utilizzate da subito per evitare di confondere il concetto di funzione con una delle sue rappresentazioni. Il percorso proposto presta particolare attenzione allo sviluppo, da parte degli studenti, di un linguaggio adeguato (prima il linguaggio naturale e poi quello matematico) per descrivere qualitativamente l'andamento delle funzioni in termini di crescita o decrescenza e di modalità di crescita.

### **Allineamenti. Esploriamo le funzioni lineari**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *funzioni lineari* e si può considerare come naturale proseguimento della precedente, senza però esserne dipendente. È costruita in continuità verticale: da una parte fa riferimento alla proporzionalità diretta (tematica già della scuola secondaria di I grado) per lo studio delle funzioni lineari, dall'altra pone una forte attenzione agli aspetti qualitativi dei grafici e alla connotazione funzionale anche nella risoluzione di equazioni e disequazioni per preparare il terreno allo studio delle funzioni con l'analisi matematica. L'attività non introduce la retta come oggetto della geometria analitica, ma esamina il modello lineare nei suoi vari aspetti in relazione principalmente a situazioni-problema incentrate sugli oggetti matematici.

Gli studenti dovrebbero essere capaci, alla fine del percorso, di associare al registro grafico dell'allineamento di punti con l'origine il registro numerico di proporzionalità diretta, la formula  $y = ax$  e i significati di pendenza e di quota.

### **Risparmiare sulle bollette telefoniche**

L'attività "risparmiare sulle bollette telefoniche" propone la costruzione di un modello matematico, che fa uso di funzioni lineari e funzioni lineari a tratti, in un contesto sicuramente familiare agli studenti: quello della scelta, in base alla tariffa più conveniente, fra diverse offerte di contratti telefonici. Oltre a consentire di introdurre, oppure di consolidare, la conoscenza delle funzioni lineari, l'attività persegue un obiettivo di più vasta portata: suggerire l'uso di conoscenze e competenze matematiche per effettuare valutazioni ragionate e consapevoli in situazioni di vita quotidiana che richiedono scelte.

Il processo di costruzione del modello matematico avviene, come nelle altre attività, gradualmente, mediante l'uso di diversi registri che vanno dal linguaggio naturale, ai registri grafico e numerico, per giungere infine a quello simbolico.

### **Aree e pavimentazioni. Esploriamo le funzioni quadratiche**

L'attività, in continuità con le due precedenti e legata al nodo concettuale *funzioni quadratiche*, rafforza il concetto di funzione e l'uso dei suoi diversi registri rappresentativi.

A partire dal problema di analisi della spesa per la pavimentazione delle aule di una scuola, si esplorano gli andamenti delle funzioni quadratiche attraverso il confronto tra la rappresentazione grafica e il segno delle differenze prime, legate alla crescita/decrecenza, e le differenze seconde costanti, che denotano una crescita/decrecenza lineare.

Lo studio delle funzioni quadratiche è ampliato dalla discussione di questioni legate all'osservazione del cambiamento dei grafici per effetto delle traslazioni e all'analisi qualitativa dei grafici rispetto alla ricerca di simmetrie, di punto di massimo/minimo, di zeri.

### **Rettangoli e fontane**

Quest'attività propone alcune situazioni problematiche che hanno a che fare con funzioni quadratiche: attraverso l'uso di questo tipo di funzioni come modelli per affrontare problemi relativi a situazioni realistiche. Essa consente di introdurre e consolidare conoscenze legate allo studio degli zeri, del segno e del valore di massimo o di minimo di una funzione quadratica.

Le tecnologie utilizzate (software di geometria dinamica, fogli elettronici, calcolatrici grafiche), grazie agli ambienti integrati e alle risorse che mettono a disposizione dell'utente, sono veri e propri strumenti didattici per la costruzione di significati degli oggetti di studio.

Come in tutte le altre attività, anche in questa, si cerca di favorire l'uso di differenti registri di rappresentazione, in particolare di quelli numerici, grafici e simbolici.

### **Diete Alimentari II**

L'attività costituisce un esempio di come sia possibile consolidare la conoscenza del concetto di funzione attraverso la costruzione di un modello per affrontare problemi relativi a diete alimentari, quindi in un contesto scientifico, ma strettamente legato a situazioni di vita quotidiana.

Il passaggio alla formalizzazione avviene gradualmente, con la costante attenzione a mantenere un forte controllo del significato dei simboli, grazie anche all'uso di registri di rappresentazione grafico-numerici.

L'attività può essere pensata in naturale continuità con quella realizzata per il terzo anno di scuola secondaria di primo grado, "Diete alimentari I"; al tempo stesso può essere estesa, portando ad affrontare problemi di ottimizzazione di complessità elevata per l'età degli studenti. Tali problemi potranno essere trattati e approfonditi in indirizzi scientifico-tecnologici o negli anni successivi a quelli del biennio.

### **Concentrazione di un medicinale**

L'attività propone lo studio di due sistemi dinamici discreti lineari.

Il primo di essi, più semplice, ha come modello una successione esponenziale decrescente, in quanto riguarda lo smaltimento di una quantità di penicillina tra un'assunzione e la successiva, sapendo che il corpo riesce a smaltirne, ogni ora, una percentuale costante.

Il secondo, più complesso, riguarda l'evoluzione, a lungo termine, della quantità di farmaco nel sangue sapendo che tale farmaco viene assunto periodicamente in quantità costante e che, immediatamente prima dell'inizio della successiva assunzione, il corpo riesce a smaltire una percentuale costante di farmaco presente.

L'attività consente di utilizzare in un contesto significativo e realistico le nozioni di funzione, successione, di crescita e decrescenza di una successione, di differenze finite per lo studio del tipo di crescita, nonché di utilizzare procedure di calcolo e semplici algoritmi per affrontare problemi relativamente complessi.

L'uso delle tecnologie informatiche consente di mettere in evidenza la ricchezza di un approccio integrato al concetto di funzione con registri di rappresentazione diversi, come quelli della lingua naturale, numerico, grafico e simbolico.

## DATI E PREVISIONI

*Dati e previsioni*, ossia statistica e probabilità, offrono l'opportunità di avvicinare lo studio della matematica alla realtà quotidiana, creando curiosità nello studente verso informazioni quantitative: che egli stesso può raccogliere sul mondo che lo circonda, pervenendo a: dati, misure, tabelle e loro elaborazioni, grafici che aiutano a comprendere fenomeni complessi. Valorizzando il contatto col mondo reale, lo studente può essere gradualmente guidato ad affrontare gli esiti di eventi incerti e la misura della verosimiglianza del loro verificarsi. Non è solo la vita quotidiana a poter richiedere la raccolta di informazioni quantitative, ma anche le attività sperimentali proprie delle scienze: fisiche, biologiche, mediche, ecc. Ciò dà modo di fare affrontare agli studenti problemi di misura e di errori di misura, coinvolgendo argomenti di scienze, statistica e probabilità e mostrando la valenza interdisciplinare del nucleo.

Nella esperienza didattica tradizionale questi sono temi del curriculum non molto sviluppati, alle volte emarginati, e trattati in modo meccanico, facendo ricorso a libri di testo non sempre adeguati.

E' indispensabile saper cogliere i vantaggi che l'insegnamento/apprendimento di questi argomenti ha per le altre parti della matematica. Infatti, uno sviluppo adeguato di statistica e probabilità è utile per passare in modo semplice dal linguaggio naturale a quello simbolico e per rafforzare numeri, geometria e relazioni. Tra l'altro la statistica offre la possibilità di far entrare contesti reali in classe, di affrontare gli argomenti con strategie problem solving, anche avvalendosi dell'uso di fogli di calcolo di grande diffusione. Il momento della comunicazione, competenza di cui la società moderna fa largo uso, dà modo di esporre conclusioni basate su numeri, prodotti elaborando dati.

La probabilità, coniugata con la statistica, offre poi strategie da perseguire per affrontare al meglio (e correttamente) l'incertezza; il chiedersi cosa potrà accadere ed il poterlo verificare attraverso molti esperimenti sarà un elemento decisivo per superare alcune delle innumerevoli misconcezioni che, in ambito statistico ed in ambito probabilistico, sono, troppo spesso, presenti negli adulti.

### Scuole secondaria di primo grado

#### Nodi concettuali e attività

Le attività di *Dati e previsioni* sono volte a toccare alcuni nodi concettuali essenziali di statistica e probabilità. Si tratta di attività ricche, che lasciano all'insegnante la scelta del livello di approfondimento a cui pervenire in classe. Tutte le attività si sviluppano in un'ottica laboratoriale, facendo perno su situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella vita quotidiana, in modo da potenziare gli aspetti interdisciplinari del nucleo, da rispettare sempre il rigore della matematica, da offrire un contesto che favorisca la comprensione dei concetti e da seguire metodiche di tipo *problem solving*. Le unità dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare le competenze necessarie per avvicinarsi in modo intelligente all'incertezza che permea ogni istante della vita e i risultati delle attività umane.

Le unità sono ricche di note metodologiche per l'insegnante e di proposte di prove di verifica. Documentazioni e materiali chiariscono le conoscenze di base necessarie al docente per affrontare il tema in classe.

#### NODI CONCETTUALI

- Raccolta dei dati: rilevazioni con questionario.
- Classificazione ed enumerazione
- Organizzazione e rappresentazione: tabelle e grafici
- Elaborazione dei dati: frequenze assolute, frequenze relative e percentuali
- Valori medi
- Costruzione di eventi composti (spazio degli eventi)
- Risultati possibili di semplici esperimenti

- Assegnazione di probabilità ad un evento (classica o frequentistica).
- Strategie risolutive per il calcolo della probabilità (complementare, incompatibilità, indipendenza).

### **ATTIVITA'**

- Come ci alimentiamo?
- Dai dati ai grafici e...ritorno
- Di media non ce n'è una sola I
- Frequenza assoluta o frequenza relativa?
- Esperimenti...esiti...eventi
- Tante strade conducono alla probabilità
- Vorrei una figlia coi capelli rossi

### **Come ci alimentiamo?**

L'attività affronta alcuni fondamentali nodi concettuali relativi alla conduzione di un'indagine statistica, utilizzando come tematica di riferimento l'alimentazione.

Il problema dell'alimentazione corretta ed equilibrata si inquadra nell'ampio tema della tutela della salute e risulta coinvolgente per gli alunni perché vicino al loro vissuto. L'argomento interdisciplinare può scaturire da considerazioni derivanti anche dallo studio del corpo umano e delle sue funzioni.

L'attività consente agli studenti di cimentarsi nella conduzione di una indagine statistica, stimola la curiosità di "racogliere informazioni", di coglierne i passi e le difficoltà per imparare a superarli, facendo acquisire ai ragazzi la consapevolezza dell'importanza dell'attività svolta e del metodo per condurla. L'attività dà importanza sia alla fase di preparazione dell'indagine (la parte più "teorica") che chiede di definire accuratamente il fenomeno da studiare, il collettivo da osservare e le caratteristiche da rilevare per raggiungere l'obiettivo conoscitivo dell'indagine, sia alla fase operativa che include la rilevazione (ossia la raccolta delle informazioni), lo spoglio dei dati, la costruzione delle distribuzioni, la costruzione di tabelle e grafici per una prima analisi del fenomeno studiato.

### **Dai dati ai grafici e ... ritorno**

Raccolti i dati su ciascun componente del collettivo di indagine è necessario classificarli ed enumerarli per poi affrontarne l'organizzazione e la rappresentazione in tabelle e grafici, così da rendere leggibili le informazioni sia a chi le ha raccolte sia a terzi ai quali sono presentate.

L'attività coniuga la conoscenza delle diverse rappresentazioni grafiche usate per le distribuzioni statistiche con la capacità di saperle costruire e la competenza di saper scegliere quella più adatta a risolvere il problema reale da studiare. L'attività mostra come una rappresentazione grafica possa aiutare ad analizzare la problematica studiata, cogliendone aspetti interessanti legati, ad esempio, alla disposizione dei dati. La rappresentazione grafica permette, infatti, di visualizzare l'andamento dei dati in modo più immediato rispetto ad una tabella e facilita i confronti fra situazioni diverse. La costruzione dei grafici porrà problemi non banali di raccordo con i nuclei *Numeri* e *Geometria*, tenuto conto che, a seconda della natura del carattere elaborato: qualitativo sconnesso, qualitativo ordinato, quantitativo, i grafici da utilizzare per rappresentare la distribuzione sono diversi.

### *Di media non ce n'è una sola I*

L'attività si inserisce in ambito statistico e riguarda la possibilità di sintetizzare una distribuzione attraverso l'uso di un appropriato valore medio. Ciò implica la conoscenza dei più noti valori medi e delle loro caratteristiche e proprietà.

L'attività mira all'acquisizione da parte dello studente della capacità di saper scegliere il valor medio idoneo tenuto conto del problema da risolvere, di saperlo calcolare ed interpretare in contesti reali a partire da situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella loro quotidianità. Si intende con ciò mostrare che la media aritmetica non è l'unico indice di sintesi della "grandezza" del fenomeno studiato e che in ambito statistico sono disponibili ed utilizzabili altri valori medi che mettono in luce altre importanti caratteristiche di una distribuzione come la moda e la mediana. Analizzando da una parte le condizioni poste dal problema reale e dall'altro ricordando le definizioni e le caratteristiche di ciascun valore medio, è possibile individuare il valore medio che sintetizza la distribuzione studiata in modo opportuno.

### *Frequenza assoluta o frequenza relativa?*

Questa attività intende far riflettere su avvenimenti reali legati ai giochi di sorte come Lotto, Super Enalotto, etc...

Questo approccio dovrebbe favorire una discussione e dunque una riflessione che metta in evidenza i numerosi misconcetti e fraintendimenti che sono alla base delle considerazioni che vengono fatte dalla maggior parte di noi nelle situazioni di incertezza. Tali fraintendimenti nascono anche dalla mancata distinzione tra frequenza assoluta e frequenza relativa.

Con questa attività si vuole favorire la consapevolezza nello studente che, ad esempio:

- 1) non è vero che in tanti lanci il numero delle Teste è vicino al numero delle Croci;
- 2) non è vero che la frequenza assoluta ci dirà, all'aumentare del numero delle prove, quanto sia la probabilità;
- 3) non è vero che se in un certo numero di prove è uscito un gran numero di Teste, deve esserci un recupero delle Croci perché la frequenza relativa è un numero vicino al 50%;
- 4) il numero "pigro" non ha memoria, in generale il caso non ha memoria.

L'unità di apprendimento si basa su due interpretazioni della probabilità, quella frequentista e quella classica. Dalla simulazione dell'esperimento casuale: lancio ripetuto di una moneta bilanciata si ottengono i dati su cui osservare delle regolarità fino ad arrivare all'assegnazione della probabilità di ottenere una faccia secondo l'approccio frequentista. Successivamente il risultato viene confrontato con l'assegnazione classica di probabilità allo stesso esito.

### *Esperimenti ... esiti ... eventi*

L'attività è strettamente legata anche a riflessioni sull'uso della lingua italiana (si auspica una collaborazione con il docente di lettere).

Lo studio dei possibili risultati di un esperimento casuale (esiti di un esperimento casuale), ha una forte valenza formativa e risulta particolarmente motivante per gli studenti perché offre l'opportunità di presentare esempi di vita quotidiana, così da evitare che questi argomenti vengano visti unicamente in funzione dei giochi di sorte e della soluzione di problemi ad essi connessi.

Con questa attività si vuole far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili relative all'esperimento casuale che si intende condurre, al fine di pervenire alla corretta individuazione di tutti gli esiti possibili (spazio degli eventi elementari). In tal modo si favorirà il passaggio dal concetto di esperimento casuale a quello di risultato di un esperimento casuale, poi allo spazio dei campioni ed infine alla distinzione fra eventi elementari e composti.

### **Tante strade conducono alla probabilità**

L'attività si inserisce in ambito statistico e probabilistico.

L'insegnamento della probabilità, oltre ad avere una forte valenza formativa, risulta particolarmente motivante per gli studenti perché offre l'opportunità di presentare esempi che non riguardano solo i giochi, trattando anche altri esempi di situazioni che i ragazzi possono incontrare nella vita di tutti i giorni, in modo da evitare che la probabilità venga vista unicamente in funzione dei giochi di sorte e della soluzione di problemi ad essi connessi.

L'attività ha lo scopo di indurre gli allievi a comprendere che esistono eventi per i quali non è possibile assegnare la probabilità secondo la metodologia classica di probabilità perché, pur conoscendo il modo con cui un esperimento casuale si svolge, non è possibile ritenere equiprobabili gli esiti elementari ad esso associati. Si apre così la strada all'assegnazione frequentista di probabilità e talvolta ad altre strategie di assegnazione di probabilità.

### **Vorrei una figlia dai capelli rossi**

In questa unità, l'incertezza viene affrontata in ambito interdisciplinare (ad es., in genetica) aprendo allo studente la consapevolezza di una possibile unitarietà di approccio al mondo scientifico.

La confidenza già maturata con alcuni termini statistici (frequenza assoluta e relativa, confronto fra dati, media, moda, ecc...), di contesto con la lettura di risultati di semplici esperimenti, offre allo studente numerose opportunità per immergersi nel cammino che porta ad affrontare le situazioni tipiche dell'incertezza ed a sviluppare il primo, embrionale, concetto di probabilità..

L'assegnazione della probabilità ad eventi casuali (esiti di un esperimento casuale) si configura come occasione per riflettere sia su alcuni aspetti concreti che ci vengono dalla vita quotidiana sia sull'atteggiamento da assumere nei confronti dei giochi di sorte.

L'attività ha lo scopo di far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili sull'esperimento casuale che si intende condurre, per una corretta assegnazione della probabilità agli eventi che un esperimento casuale può produrre.

## **Scuole secondaria di secondo grado – Primo biennio**

### **Nodi concettuali e attività**

Gli argomenti (ed i nodi concettuali) della Statistica e della Probabilità sviluppano, nella scuola secondaria di secondo grado, gli aspetti ed i temi analoghi affrontati nel periodo scolastico precedente, approfondendoli anche in modo formale. Le attività di *Dati e previsioni*, ricevono pertanto nel biennio della secondaria di secondo grado una organizzazione più adatta all'età degli studenti, in modo da offrire anche un aiuto agli studenti a riaffrontare il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico.

Le attività sono molto ricche e lasciano all'insegnante la scelta del livello di approfondimento a cui pervenire in classe. Tutte le attività si sviluppano in un'ottica laboratoriale, facendo perno su situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella vita quotidiana, in modo da potenziare gli aspetti interdisciplinari del nucleo e da rispettare sempre il rigore della matematica. Le unità dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare le competenze necessarie per avvicinarsi in modo intelligente all'incertezza che permea ogni istante della vita e i risultati delle attività umane.

Le unità sono ricche di note metodologiche per l'insegnante e di proposte di prove di verifica. Documentazioni e materiali chiariscono le conoscenze di base necessarie al docente per affrontare il tema in classe.



## **NODI CONCETTUALI**

- Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso
- Grafici e loro tipologie
- Elaborazione dei dati: valori medi
- Elaborazione dei dati: variabilità
- Eventi elementari; composti (spazio degli eventi); eventi condizionati
- Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento

## **ATTIVITA'**

- Pivot è bello
- I grafici...questi sconosciuti
- Di media non ce n'è una sola II
- Siamo “vincoli o sparpagliati”?
- Un gioco con tre dadi
- Dolci...eventi
- Qual è la probabilità di...sapendo che...

### **Pivot è bello**

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una classe del primo biennio quando gli studenti hanno acquisito abilità di base sull'utilizzo del foglio elettronico (selezionare, copiare, incollare, indirizzamenti assoluti e relativi, creazione guidata dei grafici, ...).

Dopo che gli studenti hanno svolto semplici indagini su alcuni aspetti che li coinvolgono direttamente ed hanno imparato ad effettuare lo spoglio manuale di dati provenienti da una indagine effettuata su un piccolo numero di unità, l'attività proposta diventa molto utile quando l'indagine riguarda un collettivo statistico numeroso che richiede lo spoglio e il conteggio di molti dati.

L'attività evidenzia la necessità della “codifica numerica” delle informazioni acquisite e la predisposizione di un database contenente in ogni record tutte le caratteristiche osservata per ogni unità statistica (prospetto di spoglio). La costruzione della distribuzione di frequenza associata ad un carattere viene effettuata attraverso l'uso del foglio elettronico (strumento tabelle pivot) che rende comoda e agevole la manipolazione di una grande quantità di dati tratti da un database.

L'attività mostra che l'uso del foglio elettronico facilita l'analisi delle distribuzioni di frequenza sia attraverso il calcolo di valori medi e varianza che la loro rappresentazione grafica.

L'attività può essere attuata partendo da un'indagine realmente svolta dalla classe in modo da lavorare su un numero consistente di dati reali e/o da dati recuperati da diversi siti che mettono a disposizione banche di dati come ad esempio quello dell'Istat, del Cirdis, de l'International Statistical Literacy Project dell'International Association for Statistical Education.

L'alternanza tra la lezione frontale e il lavoro di gruppo in laboratorio è utile alla comprensione delle nozioni e all'acquisizione delle competenze e può aiutare anche il recupero e l'interesse di studenti in difficoltà.

### ***I grafici ... questi sconosciuti***

L'attività si inserisce in ambito statistico con collegamenti interdisciplinari ed extra- scolastici.

L'attività coniuga la conoscenza delle diverse rappresentazioni grafiche delle distribuzioni statistiche con la capacità di saperle costruire e la competenza di saper scegliere quella più adatta a risolvere il problema reale da studiare rispetto al tipo di carattere studiato e al contesto.

L'attività mette in gioco situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella loro quotidianità e che potranno ritrovare nella loro vita di adulti.

Innanzitutto si intende mostrare come una rappresentazione grafica possa aiutare ad analizzare la problematica studiata cogliendone aspetti interessanti legati, ad esempio, alla disposizione dei dati.

Si vuole far emergere che esistono diverse tipologie di rappresentazioni grafiche e che è necessario scegliere di volta in volta quella più idonea a rappresentare il problema oggetto di studio, in relazione al carattere studiato e all'informazione che si vuole estrarre dalla distribuzione da rappresentare. Particolare attenzione viene rivolta a quelle situazioni in cui, attraverso lo studio di una rappresentazione grafica, si può giungere a conclusioni errate o per una scelta non idonea del grafico usato o per la costruzione errata dello stesso.

### ***Di media non ce n'è una sola II***

L'attività si inserisce in ambito statistico. L'attività coniuga la conoscenza dei principali valori medi per caratteri quantitativi e delle loro proprietà con la capacità di saperli calcolare, tenuto conto del modo in cui i dati sono presentati, del loro contesto e con la competenza di saper scegliere fra i diversi valori medi (moda, mediana, aritmetica, geometrica, armonica, ...) quello più opportuno per risolvere il problema che si deve affrontare.

L'attività mette in gioco situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella loro quotidianità e che potranno ritrovare nella loro vita di adulti.

Analizzando da una parte le condizioni poste dal problema da risolvere e dall'altro le definizioni e le proprietà dei valori medi è possibile arrivare ad una soluzione soddisfacente e condivisa del problema della sintesi di una distribuzione in contesti diversi.

L'attività inoltre offre lo spunto, conoscendo le proprietà, anche formali, legate ai diversi tipi di media, di utilizzarli in modo consapevole e corretto nella risoluzione del problema. Le applicazioni proposte sono estese anche a situazioni legate ad altri ambiti disciplinari.

### ***Siamo vincoli o sparpagliati?***

Quando si esaminano fenomeni collettivi (ad esempio: la piovosità in un luogo in un anno) si osserva che la caratteristica studiata può assumere una pluralità di modalità qualitative o quantitative (ossia la piovosità cambia di anno in anno) e ciò porta alla necessità di costruire indici che sintetizzino alcuni aspetti dei dati osservati. Lo studio dei valori medi ha lo scopo di sintetizzare l'insieme dei dati in un unico valore che possa rappresentarli tutti. Queste sintesi non sono però sufficienti a descrivere il fenomeno studiato ed è necessario costruire altri indici capaci di dare informazioni sulla diversità dei dati.

Questa attività si configura come un percorso per *l'analisi della variabilità di dati* osservati attraverso la costruzione di indici che mettano in luce la variabilità fra i dati oppure rispetto ad un valore medio preso come termine di riferimento. Anche in questo caso l'uso e la comprensione della geometria potrà aiutare gli studenti a meglio comprendere i concetti proposti e la loro misura.

Il percorso è stato predisposto in modo che siano possibili diversi livelli di approfondimento, tenuto conto delle conoscenze e competenze già sviluppate dagli studenti.

### ***Un gioco con tre dadi***

L'attività ha lo scopo di indurre ad una individuazione corretta dello spazio degli eventi elementari, in modo che gli studenti sappiano distinguere tra evento elementare, risultato minimo dell'esperimento (ovvero un evento non più ulteriormente suddivisibile in altri eventi) ed evento

casuale (inteso generalmente come evento composto) e di assegnare ad essi la corrispondente probabilità.

L'approccio operativo proposto per l'attività non necessita di prerequisiti particolari, non sono necessarie definizioni né teoremi sulle probabilità. Passo dopo passo l'unità porta a scoprire concetti importanti quali: lo spazio degli eventi elementari associato ad un esperimento casuale, l'evento casuale, l'assegnazione della probabilità agli eventi (come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili); scoprendo così che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende strettamente dal modo in cui l'esperimento casuale è definito.

Ciascuna fase dell'attività parte dall'effettuazione materiale dell'esperimento proposto (lancio dei dadi) e successiva annotazione degli esiti realizzati e giunge alla simulazione dell'esperimento stesso usando il foglio di calcolo. Successivamente, attraverso la costruzione di tabelle e grafici, si perviene all'assegnazione della probabilità ai diversi esiti ed all'analisi dei risultati ottenuti.

La caratteristica fondamentale dell'attività è l'attenzione al contesto, cioè al modo in cui l'esperimento casuale viene eseguito e al suo legame con l'assegnazione delle probabilità agli eventi ad esso associato.

Interessante è anche lo spunto storico in quanto l'argomento offre la possibilità di ricordare quello che in quasi tutti i libri viene descritto come l'inizio del calcolo delle probabilità, ovvero lo scambio epistolare tra Pascal e Fermat relativamente al quesito posto dal "Cavaliere di Méré".

### **Dolci ... eventi**

Partendo dalla considerazione che nella realtà gli esiti di qualunque tipo di attività non sono noti a priori, attraverso l'esame di diverse situazioni problematiche si intende condurre gli allievi a considerare gli esiti elementari associati ai diversi esperimenti casuali e a costruire eventi composti. Questa attività ha lo scopo di indurre ad un'individuazione corretta dello *spazio degli eventi* per esperimenti casuali, punto chiave per affrontare il tema dell'assegnazione di probabilità ad eventi semplici o composti.

L'attività punta sull'uso corretto del linguaggio degli eventi che verrà perciò approfondito a partire dalla formulazione corretta dell'esperimento che origina la situazione problematica. Grafi e tabelle sono gli strumenti didattici proposti per l'individuazione degli spazi degli eventi e di loro particolari sottospazi.

### **Qual è la probabilità di ... sapendo che**

L'unità affronta le prime considerazioni relative ad *eventi condizionati*, cioè ad eventi che si verificano "subordinatamente" al verificarsi di altri eventi. Ciò contribuisce, forse in modo determinante, a mettere l'allievo sulla strada di quella riflessione critica che tanto potrà essergli utile nella sua vita da "cittadino". L'attività ha lo scopo di indurre ad un'individuazione corretta dello spazio degli eventi, in modo che lo studente sappia distinguere tra evento (inteso generalmente come evento composto) ed evento elementare (l'esito elementare dell'esperimento casuale ovvero un evento non più ulteriormente suddivisibile in altri eventi). L'obiettivo è condurre gli studenti alla scoperta che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende totalmente dal modo in cui l'esperimento è definito e di assegnare la probabilità ad eventi composti in diversi contesti problematici. L'attività porta ad individuare *eventi dipendenti ed eventi indipendenti*, eventi provenienti da esperimenti articolati in più fasi fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità (probabilità composte, totali, regola di Bayes).

Anche l'uso della tecnologia (simulazione, foglio elettronico, ...) viene messo a disposizione dell'allievo nell'ambito delle strategie risolutive di assegnazione della probabilità, per affrontare situazioni nelle quali l'elaborazione del numero dei casi e la casistica generale potrebbero impedire allo studente di cogliere l'essenza probabilistica della situazione che ha davanti: la simulazione col calcolatore si rende allora necessaria per una migliore didattica che consente all'allievo di evitare (o superare) un'errata interpretazione probabilistica.

# PERCORSI NELLE ATTIVITA'

## PERCORSI PER NUCLEI I GRADO

NUMERI		GEOMETRIA	
ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
Algoritmi insoliti	<i>Linguaggio naturale e linguaggio matematico</i>	L'albero maestro	<i>Distanza punto/retta; altezze; perpendicolarità</i>
Un'eclissi di sole	<i>Linguaggio naturale e linguaggio matematico</i>	L'orologio	<i>Angoli; confronto, operazioni e misura.</i>
Parli il matematiche? Dal problema alle espressioni e alle equazioni	<i>Dai problemi alle espressioni e viceversa</i>	Costruire poligoni	<i>Costruzioni geometriche, congetture, argomentazioni</i>
Frazioni in movimento	<i>Dai problemi alle espressioni e viceversa</i>	Regolarità e simmetrie	<i>Osservazione del mondo reale; simmetrie</i>
Proprietà dei numeri razionali		Definire i quadrilateri con le simmetrie	<i>Definizione, classificazione dei quadrilateri</i>
Chicchi di riso	<i>Dai problemi alle espressioni e viceversa</i>	La foto	<i>Modellizzazione; similitudine; rapporti tra grandezze</i>
Numeri primi conosciuti e sconosciuti	<i>Dai problemi alle espressioni e viceversa</i>	Solidi noti e misteriosi	<i>Visione spaziale; rappresentazione mentale e grafica di oggetti tridimensionali..</i>

# PERCORSI PER NUCLEI I GRADO

RELAZIONI E FUNZIONI		DATI E PREVISIONI	
ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
I numeri amici	<i>Proprietà e relazioni in vari contesti</i>	Come ci alimentiamo?	<i>Raccolta dei dati: osservazioni con questionario Classificazione: frequenza assoluta</i>
Diversi fra confini uguali	<i>Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà</i>	Dai dati ai grafici e ... ritorno	<i>Organizzare e rappresentare: tabelle e grafici</i>
Il numero ... di ferro	<i>Proporzionalità diretta</i>	Di media non ce n'è una sola I	<i>Elaborare i dati: frequenze relative e percentuali. Valori medi</i>
Mettiamo in equilibrio	<i>Proprietà e relazioni in vari contesti</i>	Frequenza assoluta o frequenza relativa?	<i>Protocollo di sperimentazione. Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentista)</i>
Il figlio del re Diete alimentari I	<i>Proprietà e relazioni in vari contesti</i>	Esperimenti... Esiti ... Eventi	<i>Costruzione di eventi composti: (spazio degli eventi)</i>
Le camicie di Diofanto	<i>Problemi ed equazioni di primo grado</i>	Tante strade conducono alla probabilità	<i>Risultati possibili di semplici esperimenti Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentistica)</i>
		Vorrei una figlia coi capelli rossi	<i>Esempi di strategie risolutive per il calcolo della probabilità (complementare, incompatibilità, indipendenza)</i>

## PERCORSI PER NUCLEI II GRADO

NUMERI	
ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
Dalla frazione al numero decimale: esploriamo	<i>Rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali</i>
Il livello del mare	<i>Ordine di grandezza precisione e approssimazione</i>
Il foglio A4	<i>Concettualizzazione dei numeri reali</i>
Numeri sulla retta	<i>Ordinamento e densità</i>
Quel che vedo è sempre vero Eredità e bagagli	<i>Linguaggio naturale e linguaggio algebrico</i>
L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica	<i>Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo</i>

GEOMETRIA	
ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie	<i>Dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico</i>
Esplorazione di figure piane: <a href="#">dalle congetture alla dimostrazione</a>	<i>Strumenti ed assiomatica: verifica empirica e validazione teorica</i>
Problemi di minimo nel piano	<i>Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi</i>
Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia	<i>Costruzioni geometriche, congetture, argomentazione, dimostrazione</i>
Simmetrie nei poliedri	<i>Visione spaziale; proprietà di oggetti tridimensionali e loro rappresentazione su un piano</i>
Studenti in movimento	<i>Modellizzazione, similitudine, rapporti tra grandezze</i>
Ognuno cresce a modo suo	<i>Variazione di grandezze geometriche e individuazione di relazioni tra di esse</i>

**PERCORSI PER NUCLEI  
II GRADO**

<b>RELAZIONI E FUNZIONI</b>		<b>DATI E PREVISIONI</b>	
<b>ATTIVITA'</b>	<b>NODI CONCETTUALI</b>	<b>ATTIVITA'</b>	<b>NODI CONCETTUALI</b>
<b>Introduzione al concetto di funzione</b>	<i>Concetto di funzione</i>	<b>Pivot è bello</b>	<i>Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso</i>
<b>Allineamenti. Esploriamo le funzioni lineari</b>	<i>Funzioni lineari</i>	<b>I grafici ... questi sconosciuti</b>	<i>Grafici e loro tipologie</i>
<b>Risparmiare sulle bollette telefoniche</b>			
<b>Aree e pavimentazioni. Esploriamo le funzioni quadratiche</b>	<i>Funzioni quadratiche</i>	<b>Di media non ce n'è una sola II</b>	<i>Elaborazione dei dati: valori medi</i>
<b>Rettangoli e fontane</b>			
<b>Diete alimentari II</b>	<i>Modelli e problemi</i>	<b>Siamo "vincoli o sparpagliati"?</b>	<i>Elaborazione dei dati: variabilità</i>
<b>Concentrazione di un medicinale.</b>		<b>Un gioco con tre dadi</b>	<i>Eventi elementari; composti (spazio degli eventi)</i>
		<b>Dolci ... eventi</b>	<i>Eventi elementari; composti condizionati Spazio degli eventi</i>
		<b>Qual è la probabilità di ... sapendo che ...</b>	<i>Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento</i>



## PERCORSO per TEMA

### **“COMPRENDERE E USARE IL LINGUAGGIO MATEMATICO”**

#### I GRADO

NUCLEO	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
RELAZIONI E FUNZIONI	I numeri amici?	<i>Proprietà e relazioni in vari contesti</i>
NUMERI	Algoritmi insoliti	<i>Linguaggio naturale e linguaggio matematico</i>
DATI E PREVISIONI	Di media non ce n'è una sola!	<i>Elaborare i dati: frequenze relative e percentuali. Valori medi.</i>
GEOMETRIA	Costruire poligoni	<i>Costruzione geometriche, congetture, argomentazioni</i>
NUMERI	Parli il matematiche?	<i>Dal problema alle espressioni e viceversa</i>
DATI E PREVISIONI	Esperimenti ... Esiti ... Eventi	<i>Costruzione di eventi composti (spazio degli eventi)</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	Il figlio del re	<i>Proprietà e relazioni in vari contesti</i>
GEOMETRIA	Definire i quadrilateri con le simmetrie	<i>Definizione, classificazione dei quadrilateri</i>

#### II GRADO

NUCLEO	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
NUMERI	Quel che vedo è sempre vero	<i>Linguaggio naturale e linguaggio algebrico</i>
GEOMETRIA	Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie	<i>Dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico</i>
DATI E PREVISIONI	Pivot è bello	<i>Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	Introduzione al concetto di funzione	<i>Concetto di funzione</i>
NUMERI	Eredità e bagagli	<i>Linguaggio naturale e linguaggio algebrico</i>
DATI E PREVISIONI	Qual è la probabilità di ... sapendo che ...	<i>Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento</i>
NUMERI	L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica	<i>Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo</i>

## PERCORSO per TEMA

### **“MODELLIZZARE E RISOLVERE PROBLEMI”**

#### I GRADO

NUCLEO	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
DATI E PREVISIONI	<b>Come ci alimentiamo?</b>	<i>Raccolta dei dati: osservazioni con questionario. Classificazione: frequenza assoluta</i>
NUMERI	<b>Chicchi di riso</b>	<i>Stima e plausibilità di un calcolo</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	<b>Diversi fra confini uguali</b>	<i>Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà</i>
GEOMETRIA	<b>La foto</b>	<i>Modellizzazione; similitudine; rapporti tra grandezze</i>
NUMERI	<b>Un'eclissi di sole</b>	<i>Ordine di grandezza</i>
DATI E PREVISIONI	<b>Tante strade conducono alla probabilità</b>	<i>Risultati possibili di semplici esperimenti. Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentistica)</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	<b>Mettiamo in equilibrio</b>	<i>Proporzionalità inversa</i>
	<b>Le camicie di Diofanto</b>	<i>Problemi ed equazioni di primo grado</i>

#### II GRADO

NUCLEO	ATTIVITA'	NODI CONCETTUALI
NUMERI	<b>Il livello del mare</b>	<i>Ordine di grandezza precisione e approssimazione</i>
DATI E PREVISIONI	<b>I grafici ... questi sconosciuti</b>	<i>Grafici e loro tipologie</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	<b>Risparmiare sulle bollette telefoniche</b>	<i>Funzioni lineari</i>
GEOMETRIA	<b>Problemi di minimo nel piano</b>	<i>Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi</i>
NUMERI	<b>Eredità e bagagli</b>	<i>Linguaggio naturale e linguaggio algebrica</i>
RELAZIONI E FUNZIONI	<b>Diete alimentari II</b>	<i>Modelli e problemi</i>
	<b>Rettangoli e fontane</b>	<i>Funzioni quadratiche</i>
	<b>Concentrazione di un medicinale</b>	<i>Modelli e problemi</i>
DATI E PREVISIONI	<b>Un gioco con tre dadi</b>	<i>Eventi elementari; composti (spazio degli eventi)</i>